

**Schulinternes Curriculum am SG
Mathematik GK Q1
für die Themen in der Analysis im 1. Halbjahr,
verabschiedet von der Fachkonferenz am 16.12.14**

Qualifikationsphase (Q1) – GRUNDKURS	
<p><u>Unterrichtsvorhaben Q1-I:</u></p> <p>Thema: <i>Optimierungsprobleme (Q-GK-A1)</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Modellieren • Problemlösen <p>Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Funktionen als mathematische Modelle (Extremwertaufgaben und Wendestellenbestimmung) <p>Zeitbedarf: 12 Std.</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben Q1-II :</u></p> <p>Thema: <i>Funktionen beschreiben Formen – Modellieren von Sachsituationen mit ganzrationalen Funktionen (Q-GK-A2)</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Modellieren • Werkzeuge nutzen <p>Inhaltsfelder: Funktionen und Analysis (A) Lineare Algebra (G)</p> <p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Funktionen als mathematische Modelle (Steckbriefaufgaben) • Lineare Gleichungssysteme <p>Zeitbedarf: 12 Std.</p>

Unterrichtsvorhaben Q1-III:

Thema:

*Von der Änderungsrate zum Bestand
(Q-GK-A3)*

Zentrale Kompetenzen:

- Kommunizieren

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt:

- Grundverständnis des Integralbegriffs

Zeitbedarf: 9 Std.

Unterrichtsvorhaben Q1-IV:

Thema:

*Von der Randfunktion zur Integralfunktion
(Q-GK-A4)*

Zentrale Kompetenzen:

- Argumentieren
- Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt:

- Integralrechnung

Zeitbedarf: 12 Std.

Unterrichtsvorhaben Q1-V:

Thema:

*Natürlich: Exponentialfunktionen
(Q-GK-A5)*

Zentrale Kompetenzen:

- Problemlösen

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt:

- Fortführung der Differential- und Integralrechnung

Zeitbedarf: 9 Std.

Unterrichtsvorhaben Q1-VI:

Thema:

*Modellieren (nicht nur) mit
Exponentialfunktionen (Q-GK-A3)*

Zentrale Kompetenzen:

- Modellieren

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt:

- Fortführung der Differential- und Integralrechnung
- Funktionen als mathematische Modelle

Zeitbedarf: 9 Std.

Konkretisierte Unterrichtsvorhaben - Q-Phase Grundkurs Funktionen und Analysis (A)

Thema: <i>Optimierungsprobleme (Q-GK-A1)</i>	
Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
<p>Inhaltsbezogene Kompetenzen:</p> <p><i>Die Schülerinnen und Schüler</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • führen Extremalprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese • beschreiben das Krümmungsverhalten des Graphen einer Funktion mit Hilfe der 2. Ableitung • verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien sowie weitere hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten <p>Prozessbezogene Kompetenzen:</p> <p>Modellieren</p> <p><i>Die Schülerinnen und Schüler</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor. (<i>Strukturieren</i>) • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (<i>Mathematisieren</i>) • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (<i>Mathematisieren</i>) • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (<i>Validieren</i>) • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung (<i>Validieren</i>) <p>Problemlösen</p> <p><i>Die Schülerinnen und Schüler</i></p>	<p>Das Aufstellen der Funktionsgleichungen fördert Problemlösestrategien. An Problemen, die auf quadratische Zielfunktionen führen, sollten auch unterschiedliche Lösungswege aufgezeigt und verglichen werden. Hier bietet es sich außerdem an, Lösungsverfahren auch ohne digitale Hilfsmittel einzuüben.</p> <p>An mindestens einem Problem entdecken die Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit, Randextrema zu betrachten (z. B. „Glasscheibe“ oder verschiedene Varianten des „Hühnerhofs“). Auch auf den Aspekt der Modellvalidierung/Modellkritik kann anhand eines Extremwertproblems eingegangen werden.</p> <p>Stellen extremer Steigung eines Funktionsgraphen werden im Rahmen geeigneter Kontexte thematisiert und dabei der zweiten Ableitung eine anschauliche Bedeutung als Zu- und Abnahmerate der Änderungsrate der Funktion verliehen. Die Bestimmung der extremalen Steigung kann zunächst über das Vorzeichenwechselkriterium (an den Nullstellen der zweiten Ableitung) erfolgen.</p> <p>Die Beschreibung von Links- und Rechtskurven über die Zu- und Abnahme der Steigung führt zu einer geometrischen Deutung der zweiten Ableitung einer Funktion als „Krümmung“ des Graphen und zur Betrachtung von Wendepunkten.</p> <p>Die simultane Betrachtung beider Ableitungen führt zur Entdeckung eines weiteren hinreichenden Kriteriums für Extrempunkte. Anhand einer Funktion mit Sattelpunkt wird die Grenze dieses hinreichenden Kriteriums</p>

- finden und stellen Fragen zu einer gegebenen Problemsituation (*Erkunden*)
- wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle ...) aus, um die Situation zu erfassen (*Erkunden*)
- nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. systematisches Probieren, Darstellungswechsel, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Verallgemeinern ...) (*Lösen*)
- setzen ausgewählte Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein (*Lösen*)
- berücksichtigen einschränkende Bedingungen (*Lösen*)
- führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus (*Lösen*)
- vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten (*Reflektieren*)

entdeckt. Vor- und Nachteile der beiden hinreichenden Kriterien werden abschließend von den Lernenden kritisch bewertet.

Thema: Funktionen beschreiben Formen - Modellieren von Sachsituationen mit ganzrationalen Funktionen (Q-GK-A2)

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben („Steckbriefaufgaben“)
- beschreiben den Gauß-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
- wenden den Gauß-Algorithmus ohne digitale Werkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind

Prozessbezogene Kompetenzen:

Modellieren

Die Schülerinnen und Schüler

- erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (*Strukturieren*)
- treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (*Strukturieren*)
- übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (*Mathematisieren*)
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (*Mathematisieren*)
- beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (*Validieren*)
- beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung (*Validieren*)
- verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung (*Validieren*)

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Ausgehend zunächst von Eigenschaften des Funktionsgraphen und dann auch von außermathematischen Sachsituationen sollen Bedingungen formuliert werden, die zu mehreren Gleichungen führen. Das entstehende Gleichungssystem führt dann zu den Parametern der Funktionsgleichung.

Dabei wird von der allgemeinen Funktionsgleichung in Normalform und den entsprechenden Ableitungsfunktionen ausgegangen. Anknüpfend an die Einführungsphase kann bei quadratischen Funktionen auch nochmal der Bezug zur Scheitelpunktform hergestellt werden.

Schülerinnen und Schüler erhalten Gelegenheit, über Grundannahmen der Modellierung (Grad der Funktion, Symmetrie, Lage im Koordinatensystem, Ausschnitt) selbst zu entscheiden, deren Angemessenheit zu reflektieren und ggf. Veränderungen vorzunehmen.

Damit nicht bereits zu Beginn algebraische Schwierigkeiten den zentralen Aspekt der Modellierung überlagern, wird empfohlen, die Gleichungssysteme zunächst mit Hilfe des GTR (über die Funktion „System linearer Gleichungen lösen“ im Algebra-Menü) zu lösen. Auch die graphische Darstellung der erhaltenen Funktionen mit Hilfe des GTR ist für die Überprüfung und Veranschaulichung hilfreich.

Anschließend soll das Gaußverfahren thematisiert werden und für einige gut überschaubare Systeme mit drei Unbekannten auch ohne digitale Werkzeuge durchgeführt werden.

- reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen (*Validieren*)

Werkzeuge nutzen

Die Schülerinnen und Schüler

- verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
 - ... Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen
 - ... zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen
- nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden [...], Berechnen und Darstellen

Thema: Von der Änderungsrate zum Bestand (Q-GK-A3)

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- interpretieren Produktsommen im Kontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe
- deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext
- skizzieren zu einer gegebenen Randfunktion die zugehörige Flächeninhaltsfunktion

Prozessbezogene Kompetenzen:

Kommunizieren

Die Schülerinnen und Schüler

- erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus [...] mathemathikhaltigen Texten und Darstellungen, aus mathematischen Fachtexten sowie aus Unterrichtsbeiträgen (*Rezipieren*)
- formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege (*Produzieren*)
- wählen begründet eine geeignete Darstellungsform aus (*Produzieren*)
- wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen (*Produzieren*)
- dokumentieren Arbeitsschritte nachvollziehbar (*Produzieren*)

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Das Thema ist komplementär zur Einführung der Änderungsraten. Deshalb sollten hier Kontexte, die schon dort genutzt wurden, wieder aufgegriffen werden (Geschwindigkeit – Weg, Zuflussrate von Wasser – Wassermenge). Anhand von einfachen Anwendungssituationen kann zunächst die Vorstellung motiviert werden, dass der Flächeninhalt von Flächen unterhalb des Graphen eine Bedeutung hat. Auch die Idee der Verrechnung von Flächeninhalten ober- und unterhalb der x-Achse kann hier grundlegend entwickelt werden.

Im Bezug auf einfache, z.B. stückweise konstante oder lineare Funktionen können orientierte Flächeninhalte mit elementargeometrischen Mitteln (Aufteilung in Dreiecks- und Vierecksflächen) berechnet werden. Daraus ergibt sich die Zielsetzung, auch krummlinig begrenzte Flächen zwischen Funktionsgraph und x-Achse bestimmen zu können.

Die Schülerinnen und Schüler erkennen die Schachtelung durch Ober- und Untersummen sowie gegebenenfalls weitere Herangehensweisen als Strategien zur möglichst genauen näherungsweise Berechnung des Bestands. Die entstehenden Produktsommen werden als Bilanz über orientierte Flächeninhalte interpretiert.

Qualitativ können die Schülerinnen und Schüler so den Graphen einer Flächeninhaltsfunktion als „Bilanzgraphen“ zu einem vorgegebenen Randfunktionsgraphen skizzieren.

Falls die Lernenden entdecken, welche Auswirkungen dieser Umkehrprozess auf die Funktionsgleichung der „Bilanzfunktion“ hat, kann dies zur Überleitung in das folgende Unterrichtsvorhaben genutzt werden.

Thema: Von der Randfunktion zur Integralfunktion (Q-GK-A4)

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs
- erläutern geometrisch-anschaulich den Zusammenhang zwischen Änderungsrate und Integralfunktion (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
- nutzen die Intervalladditivität und Linearität von Integralen
- bestimmen Stammfunktionen ganzzahliger Funktionen
- bestimmen Integrale mithilfe von gegebenen Stammfunktionen und numerisch, auch unter Verwendung digitaler Werkzeuge
- ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate
- bestimmen Flächeninhalte mit Hilfe von bestimmten Integralen

Prozessbezogene Kompetenzen:

Argumentieren

Die Schülerinnen und Schüler

- stellen Vermutungen auf (*Vermuten*)
- unterstützen Vermutungen beispielgebunden (*Vermuten*)
- präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur (*Vermuten*)
- stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (*Begründen*)

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Schülerinnen und Schüler sollen hier (wieder-)entdecken, dass die Bestandsfunktion eine Stammfunktion der Änderungsrate ist.

Fragen, wie die Genauigkeit der Näherung erhöht werden kann, geben Anlass zu anschaulichen Grenzwertüberlegungen.

Da der Rekonstruktionsprozess auch bei einer abstrakt gegebenen Randfunktion möglich ist, wird für Bestandsfunktionen der Fachbegriff Integralfunktion eingeführt und der Zusammenhang zwischen Rand- und Integralfunktion im Hauptsatz formuliert.

Die Regeln zur Bildung von Stammfunktionen werden von den Schülerinnen und Schülern durch Rückwärtsanwenden der bekannten Ableitungsregeln selbstständig erarbeitet.

In den Anwendungen steht mit dem Hauptsatz neben dem numerischen Verfahren ein alternativer Lösungsweg zur Berechnung von Gesamtbeständen zur Verfügung.

Davon abgegrenzt wird die Berechnung von Flächeninhalten, bei der auch Intervalladditivität und Linearität (bei der Berechnung von Flächen zwischen Kurven) thematisiert werden. Bei der Berechnung der Flächeninhalte zwischen Graphen werden die Schnittstellen in der Regel numerisch mit dem GTR bestimmt.

Komplexere Übungsaufgaben sollten am Ende des Unterrichtsvorhabens bearbeitet werden, um Vernetzungen mit den Kompetenzen der

Werkzeuge nutzen

Die Schülerinnen und Schüler

- nutzen [...] digitale Werkzeuge [*Erg. Fachkonferenz: Tabellenkalkulation und Funktionenplotter*] zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen
- Verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
 - ... Messen von Flächeninhalten zwischen Funktionsgraph und Abszisse
 - ... Ermitteln des Wertes eines bestimmten Integrals

bisherigen Unterrichtsvorhaben (Funktionsuntersuchungen, Aufstellen von Funktionen aus Bedingungen) herzustellen.

Thema: Natürlich: Exponentialfunktionen (Q-GK-A5)

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- beschreiben die Eigenschaften von Exponentialfunktionen und die besondere Eigenschaft der natürlichen Exponentialfunktion
- untersuchen Wachstums- und Zerfallsvorgänge mithilfe funktionaler Ansätze
- interpretieren Parameter von Funktionen im Anwendungszusammenhang
- bilden die Ableitungen weiterer Funktionen:
 - natürliche Exponentialfunktion

Prozessbezogene Kompetenzen:

Problemlösen

Die Schülerinnen und Schüler

- erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme (*Erkunden*)
- entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege (*Lösen*)
- nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. systematisches Probieren, Darstellungswechsel, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme) (*Lösen*)
- variieren Fragestellungen auf dem Hintergrund einer Lösung (*Reflektieren*).

Werkzeuge nutzen

Die Schülerinnen und Schüler

- Verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum ... zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Zu Beginn des Unterrichtsvorhabens sollte eine Auffrischung der bereits in der Einführungsphase erworbenen Kompetenzen durch die Wiederholung verschiedener Funktionstypen oder Anwendungssituationen (z.B. Wachstums- und Zerfallprozesse) stehen. Im Anschluss werden die Eigenschaften einer allgemeinen Exponentialfunktion zusammengestellt. Der GTR unterstützt dabei die Klärung der Bedeutung der verschiedenen Parameter und die Veränderungen durch Transformationen.

Die Frage nach der Ableitung könnte zunächst zur Betrachtung einzelner Momentansteigungen an Graphen ausgewählter Exponentialfunktionen führen. Über Wertetabellen kann der Verlauf der Ableitungsfunktionen angedeutet werden. Die Schülerinnen und Schüler könnten in der Grafik ihres GTR experimentieren, indem sie Tangenten an verschiedenen Stellen an die Funktion legen. Mit diesem Ansatz oder durch das Einfügen der numerischen Funktion „Ableitung an einer Stelle bestimmen“ in das Eingabefenster des Plotters kann auch der Graph der Ableitungsfunktion dargestellt werden.

Aus der Untersuchung von verschiedenen Exponentialfunktionen, deren Ableitungsgraphen unterschiedlich stark von dem Graphen der Ausgangsfunktion abweichen, ergibt sich unmittelbar die Frage, für welche Basis Funktion und Ableitungsfunktion übereinstimmen.

... grafischen Messen von Steigungen

- entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge und wählen diese gezielt aus
- nutzen [...] digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen

Thema: Modellieren (nicht nur) mit Exponentialfunktionen (Q-GK-A6)

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- untersuchen Wachstums- und Zerfallsvorgänge mithilfe funktionaler Ansätze
- interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext
- bilden die Ableitungen weiterer Funktionen:
 - Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten
- bilden in einfachen Fällen zusammengesetzte Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung)
- wenden die Kettenregel auf Verknüpfungen der natürlichen Exponentialfunktion mit linearen Funktionen an
- wenden die Produktregel auf Verknüpfungen von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen an
- bestimmen Integrale mithilfe von gegebenen Stammfunktionen und numerisch, auch unter Verwendung digitaler Werkzeuge
- ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate

Prozessbezogene Kompetenzen:

Modellieren

Die Schülerinnen und Schüler

- erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (*Strukturieren*)
- übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (*Mathematisieren*)
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (*Mathematisieren*)

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Im Zusammenhang mit der Modellierung von Wachstumsprozessen durch natürliche Exponentialfunktionen mit linearen Exponenten wird die Kettenregel eingeführt, um auch (hilfsmittelfrei) Ableitungen für die entsprechenden Funktionsterme bilden zu können.

An Beispielen von Prozessen, bei denen das Wachstum erst zu- und dann wieder abnimmt (Medikamente, Fieber, Pflanzen), wird eine Modellierung durch Produkte von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen erarbeitet. In diesem Zusammenhang wird die Produktregel zum Ableiten eingeführt. Die Schülerinnen und Schüler sollten verschiedene Verläufe der Graphen von Exponentialfunktionen und zusammengesetzten Exponentialfunktionen kennenlernen (z.B. zu begrenztem Wachstum).

Aus der Beschäftigung mit Anwendungssituationen ergeben sich ebenfalls Fragen, die erfordern, dass aus der Wachstumsgeschwindigkeit auf den Gesamteffekt geschlossen wird.

Parameter werden nur in konkreten Kontexten und nur exemplarisch variiert (keine systematische Untersuchung von Funktionenscharen). Dabei werden z. B. zahlenmäßige Änderungen des Funktionsterms bezüglich ihrer Auswirkung untersucht und im Hinblick auf den Kontext interpretiert.

- | | |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none">• erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (<i>Mathematisieren</i>)• ordnen einem mathematischen Modell verschiedene passende Sachsituationen zu (<i>Mathematisieren</i>)• beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (<i>Validieren</i>)• beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung (<i>Validieren</i>)• verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung (<i>Validieren</i>)• reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen (<i>Validieren</i>) | |
|---|--|