

Vorschlag für ein schulinternes Curriculum am SG für die Themen zu Algebra und analytischen Geometrie in der Q1-Phase, 2. Halbjahr

Qualifikationsphase (Q1) – GRUNDKURS	
<p><u>Unterrichtsvorhaben VI:</u></p> <p>Thema: <i>Geraden und Skalarprodukt (Bewegungen und Schattenwurf)</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Modellieren • Problemlösen <p>Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte (Geraden) <p>Zeitbedarf: GK 6 Std.</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben VI:</u></p> <p>Thema: <i>Lagebeziehungen von Geraden im Raum</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Argumentieren • Kommunizieren • Werkzeuge nutzen <p>Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Untersuchung und Beschreibung von Lagebeziehungen • Lineare Gleichungssysteme und Interpretation im Kontext <p>Zeitbedarf: GK: 9 Std.</p>

Unterrichtsvorhaben Q1-VII:

Thema:

Ebenen als Lösungsmengen linearer Gleichungen (Untersuchung geometrischer Objekte)

Zentrale Kompetenzen:

- Argumentieren
- Kommunizieren
- Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltlicher Schwerpunkt:

- Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte

Zeitbedarf: GK: 18 Std.

Unterrichtsvorhaben Q1-VIII:

Thema:

Räume mit dem Skalarprodukt vermessen

Zentrale Kompetenzen:

- Argumentieren
- Kommunizieren
- Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltlicher Schwerpunkt:

- Berechnung und Interpretation des Skalarproduktes
- Untersuchung geometrischer Objekte und Situationen im Raum im Hinblick auf Winkel, insbes. Orthogonalität und Längen

Zeitbedarf: GK: 18 Std.

Unterrichtsvorhaben Q1-IX oder Q2-I:

Thema:

Stochastische Prozesse mit Matrizen beschreiben

Zentrale Kompetenzen:

- Modellieren
- Argumentieren

Inhaltsfeld: Stochastik/Lineare Algebra (S)

Inhaltlicher Schwerpunkt:

- Stochastische Prozesse

Zeitbedarf: GK: 12 Std..

Konkretisierte Unterrichtsvorhaben - Q-Phase Grundkurs Funktionen und Analysis (A)

Thema: *Vektoren und Geraden im Raum (Bewegungen) (Q-GK-G1)*

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- stellen Punkte im Koordinatensystem des Raumes
- beschreiben Verschiebungen durch Vektoren und Vektorketten
- berechnen die Länge von Vektoren
- stellen Geraden in Parameterform dar
- interpretieren den Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext

Prozessbezogene Kompetenzen:

Modellieren

Die Schülerinnen und Schüler

- erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren),
- treffen Annahmen treffen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor, (strukturieren)
- übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle übersetzen (*Mathematisieren*),
- erarbeiten mithilfe math. Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des math. Modells (*Mathematisieren*)
- beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (*Mathematisieren*),
- beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung (*Validieren*),
- verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung (*Validieren*)

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Lineare Bewegungen werden z. B. im Kontext von Flugbahnen durch Startpunkt, Zeitparameter und Geschwindigkeitsvektor beschrieben und dynamisch mit DGS dargestellt. Dabei sollten Modellierungsfragen (reale Geschwindigkeiten, Größe der Flugobjekte, Flugebenen) einbezogen werden.

Eine Vertiefung kann darin bestehen, den Betrag der Geschwindigkeit zu variieren. In jedem Fall soll der Unterschied zwischen einer Geraden als Punktmenge (z. B. die Flugbahn) und einer Parametrisierung dieser Punktmenge als Funktion (von der Parametermenge in den Raum) herausgearbeitet werden.

Ergänzend zum dynamischen Zugang wird die rein geometrische Frage aufgeworfen, wie eine Gerade durch zwei Punkte zu beschreiben ist. Hierbei wird herausgearbeitet, dass zwischen unterschiedlichen Parametrisierungen einer Geraden gewechselt werden kann. Punktproben sowie die Berechnung von Schnittpunkten mit den Grundebenen sollen auch hilfsmittelfrei durchgeführt werden. Die Darstellung in räumlichen Koordinatensystemen sollte hinreichend geübt werden.

Als Anwendung können zudem z. B. Schattenwürfe von Gebäuden in Parallel- und Zentralprojektion auf eine der Grundebenen berechnet und zeichnerisch dargestellt werden. Der Einsatz der DGS bietet hier die zusätzliche Möglichkeit, dass der Ort der Strahlenquelle variiert werden kann.

Werkzeuge nutzen

Die Schülerinnen und Schüler

- nutzen Geodreiecke, geometrische Modelle und dynamische Geometrie-Software
- nutzen digitale Werkzeuge zum grafischen Darstellen von Ortsvektoren, Vektorsummen und Geraden, Darstellen von Objekten im Raum

Thema: Lagebeziehungen von Geraden im Raum (Training der Fachsprache) (Q-GK-G3)

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- stellen Strecken in Parameterform dar und interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen
- stellen lineare Gleichungssysteme in Matrix-Vektor-Schreibweise dar
- beschreiben den Gauß-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
- untersuchen Lagebeziehungen zwischen Geraden
- berechnen Schnittpunkte von Geraden und deuten sie im Sachkontext

Prozessbezogene Kompetenzen:

Argumentieren

Die Schülerinnen und Schüler

- präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur (*Vermuten*)
- stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (Ober- / Unterbegriff) (*Begründen*)
- nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen (*Begründen*)
- berücksichtigen vermehrt logische Strukturen (notwendige / hinreichende Bedingung, Folgerungen / Äquivalenz, Und- / Oder-Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen) (*Begründen*)
- überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können (*Beurteilen*)

Kommunizieren

Die Schülerinnen und Schüler

- erläutern mathematische Begriffe in theoretischen und in

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Der Fokus der Untersuchung von Lagebeziehungen liegt auf dem logischen Aspekt einer vollständigen Klassifizierung sowie einer präzisen Begriffsbildung (z. B. Trennung der Begriffe „parallel“, „echt parallel“, „identisch“).

Es werden möglichst selbstständig solche Darstellungen entwickelt, die auf Lernplakaten dokumentiert, präsentiert, verglichen und hinsichtlich ihrer Brauchbarkeit beurteilt werden können. In diesem Teil des Unterrichtsvorhabens sollen nicht nur logische Strukturen reflektiert, sondern auch Unterrichtsformen gewählt werden, bei denen Kommunikationsprozesse im Team unter Verwendung der Fachsprache angeregt werden. Alternativ kann diese Unterrichtsmethode auch beim Thema Ebenen (Q-GK G2) angewandt werden.

Als Kontext kann dazu die Modellierung von Flugbahnen (Kondensstreifen) aus Q-GK-G1 wieder aufgegriffen werden. Dabei wird evtl. die Frage des Abstandes zwischen Flugobjekten relevant.

Bei genügend zur Verfügung stehender Zeit oder binnendifferenziert könnte (über den Kernlehrplan hinausgehend) das Abstandsminimum numerisch, grafisch oder algebraisch mit den Verfahren der Analysis ermittelt werden.

Begrifflich davon abgegrenzt wird der Abstand zwischen den Flugbahnen. Dies motiviert die Beschäftigung mit orthogonalen Hilfsgeraden (Q-GK-G4).

Die Lösungsmengen werden mit dem GTR bestimmt, zentrale Werkzeugkompetenz in diesem Unterrichtsvorhaben ist die Interpretation des angezeigten Lösungsvektors bzw. der reduzierten Matrix. Die Vernetzung der geometrischen Vorstellung (Lagebeziehung) und der algebraischen Formalisierung sollte stets deutlich werden.

Sachzusammenhängen (*Rezipieren*)

- verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang (*Produzieren*)
- wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen (*Produzieren*)
- erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie (*Produzieren*)
- vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität (*Diskutieren*)

Werkzeuge nutzen

Die Schülerinnen und Schüler

- nutzen den GTR zum Lösen von linearen Gleichungssystemen über die solve-Funktion und mit Hilfe der reduzierten Matrix

Thema: Ebenen als Lösungsmengen linearer Gleichungen (Untersuchung geometrischer Objekte) (Q-GK-G2)

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- stellen Ebenen in Parameterform dar
- untersuchen Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen
- berechnen Schnittpunkte von Geraden sowie Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen und deuten sie im Sachkontext
- stellen lineare Gleichungssysteme in Matrix-Vektor-Schreibweise dar
- beschreiben den Gauß-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
- interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen

Prozessbezogene Kompetenzen:

Problemlösen

Die Schülerinnen und Schüler

- wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren) aus, um die Situation zu erfassen (*Erkunden*)
- entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege entwickeln (*Lösen*),
- wählen Werkzeuge aus, die den Lösungsweg unterstützen, (*Lösen*)
- verwenden heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. [...]Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, [...])nutzen (*Lösen*),
- führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus (*Lösen*),
- vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Als Einstiegskontext für die Parametrisierung einer Ebene kann eine Dachkonstruktion mit Sparren und Querlaten dienen. Diese bildet ein schiefwinkliges Koordinatensystem in der Ebene. Damit wird die Idee der Koordinatisierung aus dem Thema E-G2 wieder aufgegriffen.

Wenn genügend Zeit zur Verfügung steht, können durch Einschränkung des Definitionsbereichs Parallelogramme und Dreiecke beschrieben und auch anspruchsvollere Modellierungsaufgaben gestellt werden, die über die Kompetenzerwartungen des KLP hinausgehen.

In diesem Unterrichtsvorhaben werden Problemlösekompetenzen erworben, indem sich heuristische Strategien bewusst gemacht werden (eine planerische Skizze anfertigen, die gegebenen geometrischen Objekte abstrakt beschreiben, geometrische Hilfsobjekte einführen, bekannte Verfahren zielgerichtet einsetzen und in komplexeren Abläufen kombinieren und unterschiedliche Lösungswege kriteriengestützt vergleichen).

Punktproben sowie die Berechnung von Spurgeraden in den Grundebenen und von Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen führen zunächst noch zu einfachen Gleichungssystemen. Die Achsenabschnitte erlauben eine Darstellung in einem räumlichen Koordinatensystem.

Die Untersuchung von Schattenwürfen eines Mastes auf eine Dachfläche z. B. motiviert eine Fortführung der systematischen Auseinandersetzung (Q-GK-A2) mit linearen Gleichungssystemen, mit der Matrix-Vektor-Schreibweise und mit dem Gauß-Verfahren.

Die Lösungsmengen werden mit dem GTR bestimmt, zentrale

Gemeinsamkeiten (*Reflektieren*),

- beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz (*Reflektieren*),
- analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern (*Reflektieren*)

Kommunizieren

- verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang (*Produzieren*),
- wählen begründet eine geeignete Darstellungsform auswählen, dokumentieren Arbeitsschritte nachvollziehbar (*Produzieren*)
- erstellen und präsentieren Ausarbeitungen (*Produzieren*)
- vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität (*Diskutieren*)

Werkzeuge nutzen

Die Schülerinnen und Schüler

- verwenden digitale Werkzeuge zum Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen
- verwenden DGS zum Darstellen von Objekten im Raum

Werkzeugkompetenz in diesem Unterrichtsvorhaben ist die Interpretation des angezeigten Lösungsvektors bzw. der reduzierten Matrix. Die Vernetzung der geometrischen Vorstellung (Lagebeziehung) und der algebraischen Formalisierung sollte stets deutlich werden.

Thema: Räume mit dem Skalarprodukt vermessen(Q-GK-G4)

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- deuten das Skalarprodukt geometrisch und berechnen es
- untersuchen mit Hilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung)

Prozessbezogene Kompetenzen:

Modellieren

Die Schülerinnen und Schüler

- treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (*Strukturieren*),
- ordnen einem mathematischen Modell verschiedene passende Sachsituationen zu (*Mathematisieren*)

Problemlösen

Die Schülerinnen und Schüler

- erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme (*Erkunden*)
- analysieren und strukturieren die Problemsituation (*Erkunden*)
- entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege (*Lösen*)
- nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. [...] Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, [...]) (*Lösen*)
- wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Das Skalarprodukt wird zunächst als Indikator für Orthogonalität aus einer Anwendung des Satzes von Pythagoras entwickelt. Durch eine Zerlegung in parallele und orthogonale Komponenten wird der geometrische Aspekt der Projektion betont. Dies wird zur Einführung des Winkels über den Kosinus genutzt (alternativ zu einer Herleitung aus dem Kosinussatz). *Eine weitere Bedeutung des Skalarproduktes kann mit den gleichen Überlegungen am Beispiel der physikalischen Arbeit erschlossen werden.*

Bei hinreichend zur Verfügung stehender Zeit kann in Anwendungskontexten (z. B. Vorbeiflug eines Flugzeugs an einem Hindernis unter Einhaltung eines Sicherheitsabstandes, vgl. Q-GK-G3) entdeckt werden, wie der Abstand eines Punktes von einer Geraden u. a. als Streckenlänge über die Bestimmung eines Lotfußpunktes ermittelt werden kann. Bei dieser Problemstellung sollten unterschiedliche Lösungswege zugelassen und verglichen werden.

Tetraeder, Pyramiden, Würfel, Prismen und Oktaeder bieten vielfältige Anlässe für (im Sinne des Problemlösens offen angelegte) exemplarische geometrische Untersuchungen und können auf reale Objekte (z. B. Gebäude) bezogen werden.

Dabei kann z. B. der Nachweis von Dreiecks- bzw. Viereckstypen (anknüpfend an das Thema E-G2) wieder aufgenommen werden.

Wo möglich, werden auch elementargeometrische Lösungswege als Alternative aufgezeigt.

Problemlösung aus (<i>Lösen</i>) <ul style="list-style-type: none"> • beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz (<i>Reflektieren</i>) 	
--	--

Thema: Stochastische Prozesse mit Matrizen beschreiben (Q-GK-S4)	
Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
<p>Inhaltsbezogene Kompetenzen: <i>Die Schülerinnen und Schüler</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • beschreiben stochastische Prozesse mithilfe von Zustandsvektoren und stochastischen Übergangsmatrizen • verwenden die Matrizenmultiplikation zur Untersuchung stochastischer Prozesse (Vorhersage nachfolgender Zustände, numerisches Bestimmen sich stabilisierender Zustände) <p>Prozessbezogene Kompetenzen: Modellieren <i>Die Schülerinnen und Schüler</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (<i>Strukturieren</i>) • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (<i>Mathematisieren</i>) • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (<i>Mathematisieren</i>) • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (<i>Validieren</i>) 	<p>Die Behandlung stochastischer Prozesse sollte genutzt werden, um zentrale Begriffe aus Stochastik (Wahrscheinlichkeit, relative Häufigkeit) und Analysis (Grenzwert) mit Begriffen und Methoden der Linearen Algebra (Vektor, Matrix, lineare Gleichungssysteme) zu vernetzen. Schülerinnen und Schüler modellieren dabei in der Realität komplexe Prozesse, deren langfristige zeitliche Entwicklung untersucht und als Grundlage für Entscheidungen und Maßnahmen genutzt werden kann.</p> <p>Austauschmodelle werden anhand von Beispielen aus der Spieltheorie, den Naturwissenschaften und Kundenströmen grafisch in Übergangsdigrammen dargestellt. Aus der Lösung von Gleichungssystemen wird die Matrixform entwickelt. Bei den Beispielen aus der Spieltheorie können über Baumdiagramme und Pfadregeln stochastische Zusammenhänge thematisiert werden.</p> <p>Untersuchungen in unterschiedlichen realen Kontexten führen zur Entwicklung von Begriffen zur Beschreibung von Eigenschaften stochastischer Prozesse (Potenzen der Übergangsmatrix, Grenzmatrix, stabile Verteilung). Hier bietet sich eine Vernetzung mit der Linearen Algebra hinsichtlich der Betrachtung linearer Gleichungssysteme und ihrer Lösungsmengen an.</p>

Argumentieren

Die Schülerinnen und Schüler

- präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur (*Vermuten*)
- nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen (*Begründen*)
- stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (*Begründen*)
- überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können (*Beurteilen*)

Werkzeuge nutzen

Die Schülerinnen und Schüler

- nutzen den GTR zum Untersuchen langfristiger Entwicklungen und zum Bestimmen von Fixvektoren als Lösung von linearen Gleichungssystemen