

Schulinternes Curriculum am SG
Stochastik 1. Halbjahr,
 Entwurf, gültig ab Schuljahr 2016/17

Mathematik GK Q2

<p><u>Unterrichtsvorhaben Q1-IX oder Q2-I:</u></p> <p>Thema: <i>Stochastische Prozesse mit Matrizen beschreiben</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Modellieren • Argumentieren <p>Inhaltsfeld: Stochastik/Lineare Algebra (S)</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Stochastische Prozesse <p>Zeitbedarf: GK: 12 Std.</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben Q2-II:</u></p> <p>Thema: <i>Von stochastischen Modellen, Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihren Kenngrößen (Q-GK-S1)</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Modellieren <p>Inhaltsfeld: Stochastik (S)</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen <p>Zeitbedarf: 6 Std.</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben Q2-III:</u></p> <p>Thema: <i>Umgekehrte Fragestellungen: Bedingte Wahrscheinlichkeiten</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Modellieren • Kommunizieren <p>Inhaltsfeld: Stochastik (S)</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Abhängigkeit und bedingte Wahrscheinlichkeiten <p>Zeitbedarf: 6 Std.</p>
<p><u>Unterrichtsvorhaben Q2-IV</u></p> <p>Thema: <i>Grundkurs Kombinatorik</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Modellieren • Argumentieren <p>Inhaltsfeld: Stochastik (S)</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben Q2-V:</u></p> <p>Thema: <i>Treffer oder nicht? – Bernoulliexperimente und Binomialverteilung (Q-GK-S2)</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Modellieren • Werkzeuge nutzen 	<p><u>Unterrichtsvorhaben Q2-VI:</u></p> <p>Thema: <i>Modellieren mit Binomialverteilungen (Q-GK-S3)</i></p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Modellieren • Argumentieren <p>Inhaltsfeld: Stochastik (S)</p>

<p>Inhaltlicher Schwerpunkt :</p> <ul style="list-style-type: none"> • Grundformeln der Kombinatorik <p>Zeitbedarf: 3 Stunden</p>	<p>Inhaltsfeld: Stochastik (S)</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Binomialverteilung <p>Zeitbedarf: 6 Std.</p>	<p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Binomialverteilung <p>Zeitbedarf: 6 Std.</p>
<p><u>Unterrichtsvorhaben Q2-VII:</u></p> <p>Thema: Fehler in der Qualitätssicherung</p> <p>Zentrale Kompetenzen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Modellieren • Argumentieren <p>Inhaltsfeld: Stochastik (S)</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Einseitige Hypothesentests <p>Zeitbedarf: 6 Std.</p>		

Konkretisierte Unterrichtsvorhaben - Q-Phase Grundkurs Funktionen und Analysis (A)

Thema: *Stochastische Prozesse mit Matrizen beschreiben (Q-GK-S4)*

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- beschreiben stochastische Prozesse mithilfe von Zustandsvektoren und stochastischen Übergangsmatrizen
- verwenden die Matrizenmultiplikation zur Untersuchung stochastischer Prozesse (Vorhersage nachfolgender Zustände, numerisches Bestimmen sich stabilisierender Zustände)

Prozessbezogene Kompetenzen:

Modellieren

Die Schülerinnen und Schüler

- erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (*Strukturieren*)
- übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (*Mathematisieren*)
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (*Mathematisieren*)
- beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (*Validieren*)

Argumentieren

Die Schülerinnen und Schüler

- präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur (*Vermuten*)
- nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Die Behandlung stochastischer Prozesse sollte genutzt werden, um zentrale Begriffe aus Stochastik (Wahrscheinlichkeit, relative Häufigkeit) und Analysis (Grenzwert) mit Begriffen und Methoden der Linearen Algebra (Vektor, Matrix, lineare Gleichungssysteme) zu vernetzen. Schülerinnen und Schüler modellieren dabei in der Realität komplexe Prozesse, deren langfristige zeitliche Entwicklung untersucht und als Grundlage für Entscheidungen und Maßnahmen genutzt werden kann.

Austauschmodelle werden anhand von Beispielen aus der Spieltheorie, den Naturwissenschaften und Kundenströmen grafisch in Übergangsdigrammen dargestellt. Aus der Lösung von Gleichungssystemen wird die Matrixform entwickelt. Bei den Beispielen aus der Spieltheorie können über Baumdiagramme und Pfadregeln stochastische Zusammenhänge thematisiert werden.

Untersuchungen in unterschiedlichen realen Kontexten führen zur Entwicklung von Begriffen zur Beschreibung von Eigenschaften stochastischer Prozesse (Potenzen der Übergangsmatrix, Grenzmatrix, stabile Verteilung). Hier bietet sich eine Vernetzung mit der Linearen Algebra hinsichtlich der Betrachtung linearer Gleichungssysteme und ihrer Lösungsmengen an.

Das im ersten Entwurf des Lehrplans für die Stufe Q1 optional vorgesehene Thema ist unter den Bedingungen des Schulalltags eher zu Beginn der Q2 zu erarbeiten, zumal das Schulcurriculum ab 2016 um das Thema Funktionenschar erweitert wurde. Für das Abitur 2017 sollten Funktionenscharen im 2. Halbjahr der Stufe Q2 behandelt werden.

Argumente für Begründungen (*Begründen*)

- stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (*Begründen*)
- überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können (*Beurteilen*)

Werkzeuge nutzen

Die Schülerinnen und Schüler

- nutzen den GTR zum Untersuchen langfristiger Entwicklungen und zum Bestimmen von Fixvektoren als Lösung von linearen Gleichungssystemen

Thema: Von stochastischen Modellen, Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihren Kenngrößen (Q-GK-S1)

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- untersuchen Lage- und Streumaße von Stichproben
- erläutern den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen
- bestimmen den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von Zufallsgrößen und treffen damit prognostische Aussagen

Prozessbezogene Kompetenzen:

Modellieren

Die Schülerinnen und Schüler

- treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (*Strukturieren*)
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (*Mathematisieren*)
- beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (*Validieren*)

Werkzeuge nutzen

Die Schülerinnen und Schüler

- nutzen den GTR und Tabellenkalkulationsprogramme zum Erstellen von Boxplots, zur Darstellung statischer Daten und zur Berechnung von Kenngrößen (Standardabweichung)

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Anhand verschiedener Glücksspiele wird zunächst der Begriff der Zufallsgröße und der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung (als Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu den möglichen Werten, die die Zufallsgröße annimmt) zur Beschreibung von Zufallsexperimenten eingeführt.

Analog zur Betrachtung des Mittelwertes bei empirischen Häufigkeitsverteilungen wird der Erwartungswert einer Zufallsgröße definiert. **Als geeignetes Beispiel hat sich die Bestimmung des fairen Lospreises bei einer Schultombola mit bekannten Gewinnkategorien (100 Preise im Wert von 2 €, 10 im Wert von 10 €, 2 im Wert von 100 €, 1000 Lose)**

Das Grundverständnis von Streumaßen wird durch Rückgriff auf die Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler mit Boxplots in der Sekundarstufe I reaktiviert. **Da der GTR in der SI nicht zur Verfügung stand, sollte an dieser Stelle der Umgang mit der Tabellenkalkulation (List) und Statistikfunktion (Data) des GTR und ggfs. auch des PC geübt werden.**

Über eingängige Beispiele von Verteilungen mit gleichem Mittelwert aber unterschiedlicher Streuung wird die Definition der Standardabweichung als mittlere quadratische Abweichung im Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen motiviert; anhand gezielter Veränderungen der Verteilung werden die Auswirkungen auf deren Kenngrößen untersucht und interpretiert.

Thema: Umgekehrte Fragestellungen: Bedingte Wahrscheinlichkeiten	
Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
<p>Inhaltsbezogene Kompetenzen: <i>Die Schülerinnen und Schüler</i></p> <ul style="list-style-type: none"> stellen Baumdiagramme zur Beschreibung von Zufallsexperimenten auf unterscheiden meabhängige von unabhängigen Ereignissen fassen Ergebnisse in Mehrfeldertafeln zusammen berechnen mit dem Satz von Bayes bedingte Wahrscheinlichkeiten <p>Prozessbezogene Kompetenzen:</p> <p>Modellieren <i>Die Schülerinnen und Schüler</i></p> <ul style="list-style-type: none"> erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (<i>Strukturieren</i>) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (<i>Mathematisieren</i>) beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (<i>Validieren</i>) <p>Argumentieren <i>Die Schülerinnen und Schüler</i></p> <ul style="list-style-type: none"> nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (<i>Begründen</i>) <p>Kommunizieren <i>Die Schülerinnen und Schüler</i></p> <ul style="list-style-type: none"> verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notationen in angemessenem Umfang (<i>Produzieren</i>) 	<p>Da die Unterscheidung abhängiger und unabhängiger Ereignisse bei mehrstufigen Zufallsexperimenten Voraussetzung zur Modellierung von Bernoulli-Ketten ist, sollten Baumdiagramme unter dem Aspekt Ziehen mit/ohne Zurücklegen an dieser Stelle wiederholt werden.</p> <p>Zudem besteht hier die Möglichkeit, das Thema bedingte Wahrscheinlichkeiten, das am Ende der E-Phase aufgrund der Stofffülle und ggfs. kurzer Schuljahre sehr kurz kommen könnte, noch einmal aufzugreifen. Mit dem der Formalisierung der der Berechnung bedingter Wahrscheinlichkeiten im umgekehrten Baumdiagramm mit dem Satz von Bayes besteht zudem die Möglichkeit der Vertiefung.</p> <p>Als alternatives Einstiegsbeispiel zu den in der E-Phase genannten Problemen bietet sich die Sicherheit von Schwangerschaftstests an.</p>

Thema: *Grundkurs Kombinatorik*

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- unterscheiden Zufallsexperimente mit/ohne Zurücklegen
- ordnen die Abzählstrategien k-Tupel, k-Permutation und k-Teilmenge passenden Beispielen zu

Prozessbezogene Kompetenzen:

Modellieren

Die Schülerinnen und Schüler

- Übersetzen Sachsituationen in ein mathematisches Modell (Mathematisieren)
- Ordnen einem mathematischen Modell verschiedene passende Sachsituationen zu (Mathematisieren)
- Beurteilen die Angemessenheit aufgestellter Modelle für die Fragestellung (Validieren)

Kommunizieren

Die Schülerinnen und Schüler

- greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter (Diskutieren)

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Zum Verständnis der Bernoulli-Formel ist eine Grundidee kombinatorischer Überlegungen notwendig.

Anhand einfacher Beispiele (Menümöglichkeiten bei 2 Vorspeisen, 4 Hauptgerichten, 3 Nachspeisen; 10 Bücher im Regal, die ersten 3 von 10 Startern; die drei Erstplatzierten in richtiger Reihenfolge) lernen die Schülerinnen und Schüler Abzählstrategien und kombinatorische Grundmodelle kennen. Anschließend werden Beispielen die passenden Modelle zugeordnet und selbst Beispiele beschrieben, die dann im Kurs diskutiert werden.

Thema: Treffer oder nicht? – Bernoulli-Experimente und Binomialverteilungen (Q-GK-S2)

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- verwenden Bernoulliketten zur Beschreibung entsprechender Zufallsexperimente
- erklären die Binomialverteilung im Kontext und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten
- beschreiben den Einfluss der Parameter n und p auf Binomialverteilungen und ihre graphische Darstellung
- bestimmen den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von Zufallsgrößen [...]

Prozessbezogene Kompetenzen:

Modellieren

Die Schülerinnen und Schüler

- treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (*Strukturieren*)
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (*Mathematisieren*)
- beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (*Validieren*)

Werkzeuge nutzen

Die Schülerinnen und Schüler

- nutzen grafikfähige Taschenrechner und Tabellenkalkulationen [...]
- verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
 - ... Generieren von Zufallszahlen
 - ... Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten Zufallsgrößen
 - ... Erstellen der Histogramme von Binomialverteilungen
 - ... Variieren der Parameter von Binomialverteilungen

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Der Schwerpunkt bei der Betrachtung von Binomialverteilungen soll auf der Modellierung stochastischer Situationen liegen. Dabei werden zunächst Bernoulliketten in realen Kontexten oder in Spielsituationen betrachtet.

Durch Vergleich mit dem „Ziehen ohne Zurücklegen“ wird geklärt, dass die Anwendung des Modells ‚Bernoullikette‘ eine bestimmte Realsituation voraussetzt, d. h. dass die Treffer von Stufe zu Stufe unabhängig voneinander mit konstanter Wahrscheinlichkeit erfolgen.

Zur formalen Herleitung der Binomialverteilung bieten sich das Galtonbrett bzw. seine Simulation und die Betrachtung von Multiple-Choice-Tests an.

Eine Visualisierung der Verteilung sowie des Einflusses von Stichprobenumfang n und Trefferwahrscheinlichkeit p erfolgt dabei durch die graphische Darstellung der Verteilung als Histogramm unter Nutzung des GTR.

Während sich die Berechnung des Erwartungswertes erschließt, kann die Formel für die Standardabweichung für ein zweistufiges Bernoulliexperiment plausibel gemacht werden. Auf eine allgemeingültige Herleitung wird verzichtet.

Durch Erkunden wird festgestellt, dass unabhängig von n und p ca. 68% der Ergebnisse in der 1σ -Umgebung des Erwartungswertes liegen.

Hinweis: Der Einsatz des GTR zur Berechnung singulärer sowie kumulierter Wahrscheinlichkeiten ermöglicht den Verzicht auf stochastische Tabellen und eröffnet aus der numerischen Perspektive den Einsatz von Aufgaben in realitätsnahen Kontexten.

... Berechnen der Kennzahlen von Binomialverteilungen (Erwartungswert, Standardabweichung)

Thema: Modellieren mit Binomialverteilungen (Q-GK-S3)

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- nutzen Binomialverteilungen und ihre Kenngrößen zur Lösung von Problemstellungen
- schließen anhand einer vorgegebenen Entscheidungsregel aus einem Stichprobenergebnis auf die Grundgesamtheit

Prozessbezogene Kompetenzen:

Modellieren

Die Schülerinnen und Schüler

- treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (*Strukturieren*)
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (*Mathematisieren*)
- beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (*Validieren*)
- beurteilen die Angemessenheit aufgestellter [...] Modelle für die Fragestellung (*Validieren*)
- reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen (*Validieren*)

Argumentieren

Die Schülerinnen und Schüler

- stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (*Begründen*)
- nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

In verschiedenen Sachkontexten wird zunächst die Möglichkeit einer Modellierung der Realsituation mithilfe der Binomialverteilung überprüft. Die Grenzen des Modellierungsprozesses werden aufgezeigt und begründet. In diesem Zusammenhang werden geklärt:

- die Beschreibung des Sachkontextes durch ein Zufallsexperiment
- die Interpretation des Zufallsexperiments als Bernoullikette
- die Definition der zu betrachtenden Zufallsgröße
- die Unabhängigkeit der Ergebnisse
- die Benennung von Stichprobenumfang n und Trefferwahrscheinlichkeit p

Dies erfolgt in unterschiedlichsten Realkontexten, deren Bearbeitung auf vielfältigen Zeitungsartikeln basieren kann. Auch Beispiele der Modellumkehrung werden betrachtet („Von der Verteilung zur Realsituation“).

Prüfverfahren mit vorgegebenen Entscheidungsregeln bieten einen besonderen Anlass, um von einer (ein- oder mehrstufigen) Stichprobenentnahme aus einer Lieferung auf nicht bekannte Parameter in der Grundgesamtheit zu schließen. **In der Neuauflage unseres Lehrbuches findet sich diese Anwendung unter dem Wahlthema „Von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit schließen“. Das Thema setzt die intensive Nutzung des GTR voraus!**

Hinweis: Eine Stichprobenentnahme kann auch auf dem GTR simuliert werden.

<p>Argumente für Begründungen (<i>Begründen</i>)</p> <ul style="list-style-type: none"> • verknüpfen Argumente zu Argumentationsketten (<i>Begründen</i>) <p>Werkzeuge nutzen <i>Die Schülerinnen und Schüler</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • nutzen grafikfähige Taschenrechner und Tabellenkalkulationen [...] • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum <ul style="list-style-type: none"> ... Generieren von Zufallszahlen ... Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten Zufallsgrößen ... Erstellen der Histogramme von Binomialverteilungen ... Variieren der Parameter von Binomialverteilungen ... Berechnen der Kennzahlen von Binomialverteilungen (Erwartungswert, Standardabweichung) 	
---	--

Thema: Fehler in der Qualitätssicherung (Einseitige Signifikanztests)	
Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
<p>Inhaltsbezogene Kompetenzen: <i>Die Schülerinnen und Schüler</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • beschreiben den Fehler 1. und 2. Art im Sachzusammenhang • berechnen das Risiko 1. und 2. Art bei einseitigen Hypothesentests <p>Prozessbezogene Kompetenzen: Modellieren <i>Die Schülerinnen und Schüler</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (<i>Strukturieren</i>) • reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen (<i>Validieren</i>) <p>Problemlösen <i>Die Schülerinnen und Schüler</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • wenden Routineverfahren unter Nutzung des GTR an (<i>Lösen</i>) 	<p>Zur Vertiefung des Themas VI scheint es sinnvoll, an praxisnahen Beispielen Fehler beim Aufstellen zu Hypothesen zu thematisieren. Um das für Schüler erfahrungsgemäß schwere Thema im GK zu erleichtern, genügt es, das Risiko 1. und 2. Art bei gegebenen Annahmebereichen zu bestimmen. Als Anwendungen bieten sich Qualitätskontrollen an, bei denen das Risiko des Lieferanten und das des Abnehmers diskutiert wird.</p>

Argumentieren

Die Schülerinnen und Schüler

- stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (*Begründen*)
- nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen (*Begründen*)

