Schulinterner Lehrplan

Mathematik
Qualifikationsphase 1

Analysis

Leistungskurs

Potenziale entwickeln. Vielfalt schätzen.
Gemeinschaft gestalten.

Städtisches Gymnasium Gütersloh

Gültig ab Schuljahr 2024/25

Übersicht über die Themen

Thema	Schwerpunkte	Zeitumfang	Anmerkungen
Eigenschaften von Funktionen	• Wdh Eigenschaften ganzrationaler und trigonometrischer Funktionen • Transformation von Funktionen, besonders geeignet am Bsp. der Sinusfunktion bzw. je nach Vorkenntnissen der Kosinusfunktion • Begriff der Umkehrfunktion am Beispiel der Wurzelfunktion • Auswirkungen von Parametern auf Funktionsgraphen • Nutzen von Parametern in Anwendungen		Angleichen von Kenntnissen aus versch.Kursen. Anknüpfen an Transformation von Sinusfunkt. in Klasse 10 Rechnen mit Parametern, Unterscheidung von Parametern und Funktionsargument
Anwendungen von ganzrationalen Funktionen: Optimierungsaufgaben und Modellierungsaufgaben	• Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen • bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben („Steckbriefaufgaben“) • wenden den Gauß-Algorithmus zum hilfsmittelfreien Lösen von LGS an	Bis zur 1. Klausur/ Herbstferien	Anwendungsaufgaben Verfügbarkeit eines angemessenen Aufgabenpools für die Klausur
Die natürliche Exponentialfunktion	• Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion • Verkettete Exponentialfunktionen • Modellierungsfragen beim Nutzen von Exponentialfunktionen zur Beschreibung von begrenztem und unbegrenztem Wachstum und Zerfall	Bis zur 2. Klausur/November	Nur verkettete Exponentialfunktionen
Integralrechnung I: *Von der Änderungsrate zum Bestand*		Bis Halbjahreswechsel	Beide Sequenzen sind als Einheit zu sehen, weil zwei Aspekte des Integralverständnisses zu vermitteln sind. Wiederaufgriff Grenzwertbegriff aus EF.
Integralrechnung II: *Von der Randfunktion zur Integralfunktion*			
Modellieren (nicht nur) mit Exponentialfunktionen	Anwendungsaufgaben zu allen Funktionsklassen Ergänzung um zusammengesetzte Funktionen, bei denen die Produktregel anzuwenden ist		

Konkretisierte Unterrichtsvorhaben - Q-Phase LK Funktionen und Analysis (A)

Unterrichts-vorhaben	**Thema** **Inhaltsfeld/ Inhaltliche Schwerpunkte** **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**	**Schwerpunkte der Kompetenzentwicklung**
Eigenschaf-ten von Funktionen (Q-LK-A1)	**Thema**: *Beschreibung der Eigenschaften von Funktionen mit und ohne Parameter und deren Transformation und Nutzung für einfache Modellierungen* **Zentrale Kompetenzen:** • Operieren • Kommunizieren **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltliche Schwerpunkte**: Die Schülerinnen und Schüler • bestimmen die Eigenschaften von Funktionen (Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für x → $\pm\infty$) bei ganzrationalen Funktionen, Sinusfunktionen der Form f(x)= $a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ sowie entsprechenden Kosinusfunktionen (1) lösen Polynomgleichungen, die sich durch einfaches Ausklammern auf lineare oder quadratische Gleichungen zurückführen lassen, sowie biquadratische Gleichungen ohne Hilfsmittel, (3) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Sinusfunktionen, Kosinusfunktionen und von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten sowie der	**Prozessbezogene Kompetenzen:** *Die Schülerinnen und Schüler…* **Operieren** (1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an, (2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt, (3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch, (4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten, (5) führen Darstellungswechsel sicher aus, (6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese, (9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen. (11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,

	Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen, (5) interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext der Fragestellung und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionsscharen, (6) bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von ganzrationalen Funktionen, Sinus- und Kosinusfunktionen sowie von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten und wenden die Kettenregel an, (7) untersuchen Funktionen auch in Abhängigkeit von Parametern mithilfe von vorgegebenen und mit dem MMS ermittelten Ableitungen im Kontext der Fragestellung, (8) deuten die Ableitung mithilfe der Approximation durch lineare Funktionen, (13) erläutern den Zusammenhang zwischen dem Graphen einer Funktion und dem Graphen seiner Umkehrfunktion am Beispiel der Wurzelfunktion **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** • *Innermathematische Kategorisierung von Funktionsklassen (ganzrational, trigonometrisch, Exponentialfunktionen mit rationaler Basis),* • *Generierung neuer Funktionen durch Transformationen (Verschiebung in y- und x-Richtung, Streckung/Stauchung) sowie durch Umkehrung von Funktionen,* • *Berücksichtigung von Definitionsmengen, Bestimmung der Wertemenge mit Hilfe der Extrema und des globalen Verhaltens* • *Rechnen mit Parametern, Unterscheidung von Parametern und Funktionsargument,* • *Anwendungsaufgaben mit Parametern, Berechnung charakteristischer Werte von Funktionenscharen*	(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum … • Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern, • zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen, • Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen, • Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern, (13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus, **Modellieren** *Mathematisieren* Die Schülerinnen und Schüler (3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle, (4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu, (5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells. *Interpretieren und Validieren* (6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung, (7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen

	• *Ein möglicher Abschluss dieser Reihe könnte die Sequenz „Meeresspielanstieg I – Modellierung mit ganzrationalen Funktionen“ sein*	**Argumentieren** *Begründen* (4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen, (5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente, (6) entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten, (7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch), (8) verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen) **Kommunizieren** *Rezipieren* (1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen, (2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren, (3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen, (4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind.

Q-LK-A2-3	**Thema**: *Optimieren mit Extremwertaufgaben und Modellieren mit geeigneten Funktionen* **Zentrale Kompetenzen:** • Problemlösen • Modellieren **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltliche Schwerpunkte**: Die Schülerinnen und Schüler (2) führen Extremwertprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese, (3) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, der Potenzfunktionen $\frac{1}{x}$ sowie der Transformationen dieser Funktion zur Beantwortung von Fragestellungen, (4) bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben („Steckbriefaufgaben“) (23) lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen sowie mithilfe von Sinus- und Kosuinusfunktionen, (AG 6) erläutern den Gauß-Algorithmus als algorithmisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme, (AG 7) wenden den Gauß-Algorithmus als ein algorithmisches Lösungsverfahren ohne digitale Mathematikwerkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind,	**Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** *Die Schülerinnen und Schüler…* **Operieren** *Arbeit mit Medien und Werkzeugen* (12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum … • Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern, • zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen, • Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen, (13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus, **Modellieren** *Strukturieren* (1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung, (2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor. *Mathematisieren* (3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle, (5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells.

	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen • *Anwendungsaufgaben* • *Verfügbarkeit eines angemessenen Aufgabenpools für die Klausur* • *Das Aufstellen der Funktionsgleichungen fördert Problemlösestrategien.* • *An Problemen, die auf quadratische Zielfunktionen führen, sollten auch unterschiedliche Lösungswege aufgezeigt und verglichen werden. Hier bietet es sich außerdem an, Lösungsverfahren auch ohne digitale Hilfsmittel einzuüben.* • *An mindestens einem Problem entdecken die Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit, Randextrema zu betrachten (z. B. „Glasscheibe“ oder verschiedene Varianten des „Hühnerhofs“). Auch auf den Aspekt der Modellvalidierung/Modellkritik kann anhand eines Extremwertproblems eingegangen werden* • *Ausgehend zunächst von Eigenschaften des Funktionsgraphen und dann auch von außermathematischen Sachsituationen sollen Bedingungen formuliert werden, die zu mehreren Gleichungen führen. Das entstehende Gleichungssystem führt dann zu den Parametern der Funktionsgleichung.* • *Schülerinnen und Schüler erhalten Gelegenheit, über Grundannahmen der Modellierung (Grad der Funktion, Symmetrie, Lage im Koordinatensystem, Ausschnitt) selbst zu entscheiden, deren Angemessenheit zu reflektieren und ggf. Veränderungen vorzunehmen.* • *Damit nicht bereits zu Beginn algebraische Schwierigkeiten den zentralen Aspekt der Modellierung überlagern, wird empfohlen, die Gleichungssysteme zunächst mit Hilfe*	*Interpretieren und Validieren* (6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung, (7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen (8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit, (9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung **Problemlösen** *Erkunden* (1) stellen Fragen zu zunehmend komplexen Problemsituationen, (2) analysieren und strukturieren die Problemsituation, (3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren), (4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen. *Lösen* (5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),

	des MMS algebraisch zu lösen. Auch die graphische Darstellung der erhaltenen Funktionen mit Hilfe des MMS ist für die Überprüfung und Veranschaulichung hilfreich. • *Anschließend soll das Gaußverfahren thematisiert werden und für einige gut überschaubare Systeme mit drei Unbekannten auch ohne digitale Werkzeuge durchgeführt werden.*	(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus, (7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein, (8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen, (9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus. *Reflektieren* (10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung, (11) analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern, (12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz, **Argumentieren** *Beurteilen* (10) beurteilen, ob vorliegende Argumentationsketten vollständig und fehlerfrei sind, (11) ergänzen lückenhafte und korrigieren fehlerhafte Argumentationsketten, (12) beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihres Geltungsbereichs und ihrer Übertragbarkeit, (13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können.

Q-LK-A4	***Thema**:* *Die Exponentialfunktion zur Beschreibung von Wachstums- und Zufallsprozessen* ***Zentrale Kompetenzen:*** • *Modellieren* • *Kommunizieren* ***Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A)* ***Inhaltsbezogene Kompetenzen:*** *Die Schülerinnen und Schüler* (3) *nutzen die Eigenschaften von Exponentialfunktionen sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen* (5) *interpretieren Parameter von Funktionen im Anwendungszusammenhang* *(6) bilden auch ohne Hilfsmittel die Ableitungen weiterer Funktionen:* • *natürliche Exponentialfunktion* • *verkettete Exponentialfunktionen* (10) *beschreiben die Eigenschaften von Exponentialfunktionen der Form a^x und erläutern die Besonderheit der natürlichen Exponentialfunktion ($f' = f$),* (11) *verwenden Exponentialfunktionen zur Beschreibung von begrenzten und unbegrenzten Wachstums- und Zerfallsvorgängen und beurteilen die Qualität der Modellierung,* (12) *untersuchen ausgewählte Funktionen, insbesondere die natürliche Exponential- und Logarithmusfunktion, auf Umkehrbarkeit und ermitteln in einfachen Fällen einen Funktionsterm der Umkehrfunktion unter Berücksichtigung von Definitions- und Wertebereich,* (13) *erläutern den Zusammenhang zwischen dem Graphen einer Funktion und dem Graphen seiner Umkehrfunktion*	**Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** *Die Schülerinnen und Schüler…* , **Operieren** *Arbeit mit Medien und Werkzeugen* (11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden, (12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum … • Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern, • zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen, • Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen, (13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus **Modellieren** *Mathematisieren* (3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle, (4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu, (5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells.

	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen *Zu Beginn des Unterrichtsvorhabens sollte eine Auffrischung der bereits in Kompetenzen durch die Wiederholung der Eigenschaften einer allgemeinen Exponentialfunktion erfolgen. Das MMS unterstützt dabei die Klärung der Bedeutung der Parameter und die Veränderungen durch Transformationen.* *Die Frage nach der Ableitung könnte zunächst zur Betrachtung einzelner Momentansteigungen an Graphen ausgewählter Exponentialfunktionen führen. Über Wertetabellen kann der Verlauf der Ableitungsfunkionen angedeutet werden. Die Schülerinnen und Schüler könnten in der Grafik ihres MMS experimentieren, indem sie Tangenten an verschiedenen Stellen an die Funktion legen. Mit diesem Ansatz oder durch das Einfügen der numerischen Funktion „Ableitung an einer Stelle bestimmen“ in das Eingabefenster des Plotters kann auch der Graph der Ableitungsfunktion dargestellt werden.* *Aus der Untersuchung von verschiedenen Exponentialfunktionen, deren Ableitungsgraphen unterschiedlich stark von dem Graphen der Ausgangsfunktion abweichen, ergibt sich unmittelbar die Frage, für welche Basis Funktion und Ableitungsfunktion übereinstimmen* • *Als Anwendung könnte die Sequenz „Meeresspiegelanstieg II“, deren Modellierungen dann mit den ganzrationalen Modellierungen aus der Sequenz Meeresspielanstieg I verglichen werden könnten, das Thema abschließen*	*Interpretieren und Validieren* (6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung, (7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen, (8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Mo-delle bzgl. der Angemessenheit, (9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung. **Problemlösen** (4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen *(Erkunden)* (9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)* (5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. systematisches Probieren, Darstellungswechsel, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme) *(Lösen)* (14) variieren und verallgemeinern Fragestellungen auf dem Hintergrund einer Lösung *(Reflektieren).* **Argumentieren** *Vermuten* (1) stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen be-gründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf, (2) unterstützen Vermutungen durch geeignete Beispiele, (3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur

		Kommunizieren *Rezipieren* (3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen, (4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind. *Produzieren* (10) konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte (im Rahmen der Sequenz Meeresspiegelanstieg). *Diskutieren* (11) greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter, (12) nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung, (13) vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen unter mathematischen Gesichtspunkten hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität, (14) vergleichen und beurteilen mathematikhaltige Informationen und Darstellungen in Alltagsmedien unter mathematischen Gesichtspunkten, (15) führen Diskussionsbeiträge zu einem Fazit zusammen.

Q-LK-A5	**Thema**: *Von der Änderungsrate zum Bestand* **Zentrale Kompetenzen:** • Kommunizieren **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltliche Schwerpunkte**: Die Schülerinnen und Schüler *Die Schülerinnen und Schüler* (14) interpretieren Produktsummen im Kontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe (15) deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext (16) skizzieren zum Graphen einer gegebenen Randfunktion den Graphen der zugehörigen Flächeninhaltsfunktion **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** *Das Thema ist komplementär zur Einführung der Änderungsraten. Deshalb sollten hier Kontexte, die schon dort genutzt wurden, wieder aufgegriffen werden (Geschwindigkeit – Weg, Zuflussrate von Wasser – Wassermenge). Anhand von einfachen Anwendungssituationen kann zunächst die Vorstellung motiviert werden, dass der Flächeninhalt von Flächen unterhalb des Graphen eine Bedeutung hat. Auch die Idee der Verrechnung von Flächeninhalten ober- und unterhalb der x-Achse kann hier grundlegend entwickelt werden.* *Im Bezug auf einfache, z.B. stückweise konstante oder lineare Funktionen können orientierte Flächeninhalte mit elementar-*	**Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** *Die Schülerinnen und Schüler…* **Operieren** *Arbeit mit Medien und Werkzeugen* (11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden, (12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum … • Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern, • zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen, • Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen, (13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus **Modellieren** *Mathematisieren* (3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle, (4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu, (5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells.

	geometrischen Mitteln (Aufteilung in Dreiecks- und Vierecksflächen) berechnet werden. Daraus ergibt sich die Zielsetzung, auch krummlinig begrenzte Flächen zwischen Funktionsgraph und x-Achse bestimmen zu können. *Die Schülerinnen und Schüler erkennen die Schachtelung durch Ober- und Untersummen sowie gegebenenfalls weitere Herangehensweisen als Strategien zur möglichst genauen näherungsweisen Berechnung des Bestands. Die entstehenden Produktsummen werden als Bilanz über orientierte Flächeninhalte interpretiert.* *Qualitativ können die Schülerinnen und Schüler so den Graphen einer Flächeninhaltsfunktion als „Bilanzgraphen“ zu einem vorgegebenen Randfunktionsgraphen skizzieren.* *Falls die Lernenden entdecken, welche Auswirkungen dieser Umkehrprozess auf die Funktionsgleichung der „Bilanzfunktion“ hat, kann dies zur Überleitung in das folgende Unterrichtsvorhaben genutzt werden.*	*Interpretieren und Validieren* (6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung, (7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen, (8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit, (9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung. **Problemlösen** (4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen *(Erkunden)* (9) entwickeln Ideen für mögl. Lösungswege *(Lösen)* (5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. systematisches Probieren, Darstellungswechsel, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme) *(Lösen)* (14) variieren und verallgemeinern Fragestellungen auf dem Hintergrund einer Lösung *(Reflektieren).* **Argumentieren** *Vermuten* (1) stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf, (2) unterstützen Vermutungen durch geeignete Beispiele, (3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur

		Kommunizieren *Rezipieren* (3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen & anwendungsbezogenen Zusammenhängen, (4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind. *Produzieren* (8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen, (9) dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent, *Diskutieren* (11) greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter, (12) nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung, (13) vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen unter mathematischen Gesichtspunkten hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität, (14) vergleichen und beurteilen mathematikhaltige Informationen und Darstellungen in Alltagsmedien unter mathematischen Gesichtspunkten, (15) führen Diskussionsbeiträge zu einem Fazit zusammen.

Q-LK-A6	**Thema**: *Von der Randfunktion zur Integralfunktion* **Zentrale Kompetenzen:** • Operieren • Problemlösen **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltliche Schwerpunkte**: Die Schülerinnen und Schüler (15) deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext der Fragestellung (16) skizzieren zum Graphen einer gegebenen Randfunktion den Graphen der zugehörigen Flächeninhaltsfunktion, (17) erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs, (18) begründen den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung unter Verwendung eines anschaulichen Stetigkeitsbegriffs und wenden den Hauptsatz an, (19) bestimmen ohne Hilfsmittel Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen, nutzen vorgegebene Stammfunktionen und verwenden die natürliche Logarithmusfunktion als Stammfunktion der Funktion $x \rightarrow \frac{1}{x}$ (20) nutzen die Intervalladditivität & Linearität von Integralen, (21) ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate oder der Randfunktion, (22) ermitteln Flächeninhalte mithilfe von bestimmten & uneigentlichen Integralen sowie Volumina von Körpern, die durch die Rotation um die Abszisse entstehen **Vorhabenbezogene Absprachen**	**Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** *Die Schülerinnen und Schüler…* **Operieren** *Hilfsmittelfreies Operieren* (7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus, (8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven, (9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen. *Arbeit mit Medien und Werkzeugen* (11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden, (12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum … • Lösen von Gleichungen, • Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen, (13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus **Problemlösen** *Erkunden* (3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren), (4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen

	und Empfehlungen *Schülerinnen und Schüler sollen hier (wieder-)entdecken, dass die Bestandsfunktion eine Stammfunktion der Änderungsrate ist.* *Fragen, wie die Genauigkeit der Näherung erhöht werden kann, geben Anlass zu anschaulichen Grenzwertüberlegungen.* *Da der Rekonstruktionsprozess auch bei einer abstrakt gegebenen Randfunktion möglich ist, wird für Bestandsfunktionen der Fachbegriff Integralfunktion eingeführt und der Zusammenhang zwischen Rand- und Integralfunktion im Hauptsatz formuliert.* *Die Regeln zur Bildung von Stammfunktionen werden von den Schülerinnen und Schülern durch Rückwärtsanwenden der bekannten Ableitungsregeln selbstständig erarbeitet.* *In den Anwendungen steht mit dem Hauptsatz neben dem numerischen Verfahren ein alternativer Lösungsweg zur Berechnung von Gesamtbeständen zur Verfügung.* *Davon abgegrenzt wird die Berechnung von Flächeninhalten, bei der auch Intervalladditivität und Linearität (bei der Berechnung von Flächen zwischen Kurven) thematisiert werden. Bei der Berechnung der Flächeninhalte zwischen Graphen werden die Schnittstellen in der Regel numerisch mit dem GTR bestimmt.* *Komplexere Übungsaufgaben sollten am Ende des Unterrichtsvorhabens bearbeitet werden, um Vernetzungen mit den Kompetenzen der bisherigen Unterrichtsvorhaben (Funktionsuntersuchungen, Aufstellen von Funktionen aus Bedingungen) herzustellen.*	*Lösen* (5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern), (7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein, (9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *Reflektieren* (10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung, (11) analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern, (12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz, (13) benennen zugrundeliegende heuristische Strategien und Prinzipien und übertragen diese begründet auf andere Problemstellungen, (14) variieren und verallgemeinern Fragestellungen auf dem Hintergrund einer Lösung **Argumentieren** *Vermuten* Die Schülerinnen und Schüler (1) stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf, (2) unterstützen Vermutungen durch geeignete Beispiele,

		(3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur **Kommunizieren** *Produzieren* (6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang, (7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus, (8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen, (9) dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent,

Q-LK-A7	**Thema**: *Modellieren (nicht nur) mit Exponentialfunktionen* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Problemlösen **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltliche Schwerpunkte**: Die Schülerinnen und Schüler (6) bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinus- und Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion sowie von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten und wenden die Produkt- und Kettenregel an,	**Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** *Die Schülerinnen und Schüler…* , **Operieren** *Arbeit mit Medien und Werkzeugen* (11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden, (12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum Lösen von Gleichungen, (13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus

	(7) untersuchen Funktionen auch in Abhängigkeit von Parametern mithilfe von vorgegebenen und mit dem MMS ermittelten Ableitungen und unbestimmten Integralen („Stammfunktionen“) im Kontext der Fragestellung, (9) nutzen zusammengesetzte Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) zur Beschreibung quantifizierbarer Zusammenhänge (23) lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen und daraus zusammengesetzten Funktionen sowie der Sinus- und Kosinusfunktion **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** *An Beispielen von Prozessen, bei denen das Wachstum erst zu- und dann wieder abnimmt (Medikamente, Fieber, Pflanzen), wird eine Modellierung durch Produkte von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen erarbeitet. In diesem Zusammenhang wird die Produktregel zum Ableiten eingeführt. Die Schülerinnen und Schüler sollten verschiedene Verläufe der Graphen von Exponentialfunktionen und zusammengesetzten Exponentialfunktionen kennenlernen (z.B. zu begrenztem Wachstum).* *Aus der Beschäftigung mit Anwendungssituationen ergeben sich ebenfalls Fragen, die erfordern, dass aus der Wachstumsgeschwindigkeit auf den Gesamteffekt geschlossen wird. Parameter werden nur in konkreten Kontexten und nur exemplarisch variiert (keine systematische Untersuchung von Funktionenscharen). Dabei werden z. B. zahlenmäßige Änderungen des Funktionsterms bezüglich ihrer Auswirkung untersucht und im Hinblick auf den Kontext interpretiert.*	**Modellieren** *Strukturieren* (1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung, (2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor. *Mathematisieren* (3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle, (4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu, (5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells. *Interpretieren und Validieren* (6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung, (7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen, (8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle **Problemlösen** *Lösen* (7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein, (9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege

	• *Anwendungsaufgaben zu allen Funktionsklassen* • *Ergänzung um zusammengesetzte Funktionen, bei denen die Produktregel anzuwenden ist* • *Option der Verschiebung in Stufe Q2, um dort dem Schwerpunkt der Analysis gerecht zu werden* • *Möglichkeit des spiralcurricularen Vorgehens*	*Reflektieren* (10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung, (11) analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern, (12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz, **Kommunizieren** *Produzieren* (9) dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent,